

量子力学讨论班结课论文

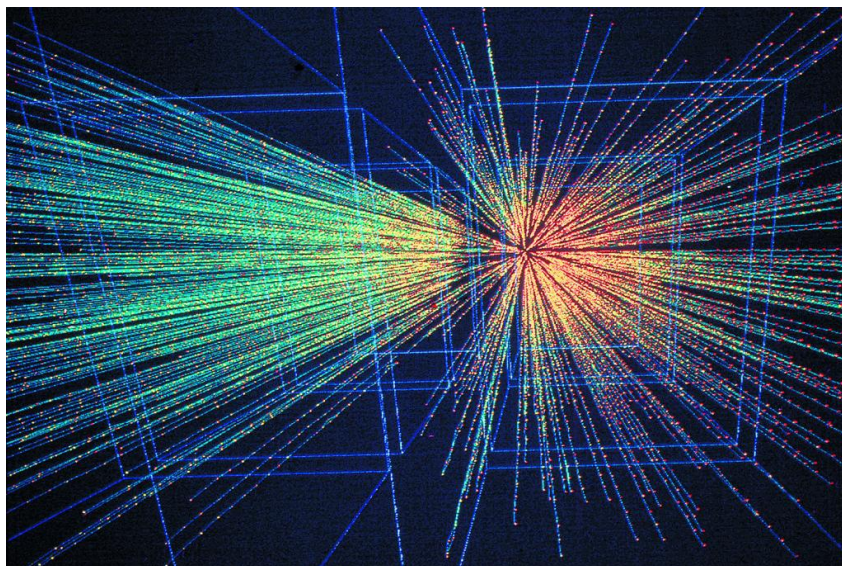
# 库伦散射的打怪升级

王誉晨

中山大学物理学院

版本：1.00

更新：2023年7月6日



# 目录

<b>I 上篇：经典解</b>	<b>3</b>
1 微分散射截面：实验可测量	3
2 卢瑟福公式：经典力学	4
2.1 Coulomb 散射公式 . . . . .	4
2.2 Rutherford 公式 . . . . .	5
<b>II 中篇：精确解</b>	<b>6</b>
3 分波法：特殊函数	6
3.1 分波法评述 . . . . .	6
3.2 分波法求解 Coulomb 势散射 . . . . .	19
4 旋转抛物坐标法：对称性与守恒量	25
4.1 Binet 公式 . . . . .	25
4.2 旋转抛物坐标求解 . . . . .	25
<b>III 下篇：近似解</b>	<b>30</b>
5 玻恩近似法：一阶微扰	30
5.1 屏蔽库伦势的定态散射 . . . . .	30
5.2 $T$ 算符和 $S$ 算符 . . . . .	31
6 费曼图法：量子场论	32
6.1 QED 理论 . . . . .	32
6.2 费曼图法 . . . . .	33
6.3 返璞归真：重现 Coulomb 势，Rutherford 公式 . . . . .	34
参考文献	38

## Part I

# 上篇：经典解

## 1 微分散射截面：实验可测量

微分散射截面具有面积量纲，是散射问题中关注的核心物理量，我们可以从以下四个角度给出其定义。

### 定义 1.1 (从物理图像角度定义)

对于散射问题，我们内心中都有一个图像，当瞄准距离  $b$  越小时，入射粒子被散射后，散射的天顶角  $\theta$  值越大，这意味着，所有瞄准距离相同  $b + db$  范围内的入射粒子都会被散射到同一片  $\theta + d\theta$  范围的空心锥形区域内  $d\Omega$ ，所以，对于单个靶粒子，我们定义这样的一个环状面积为散射截面：

$$d\sigma(\theta) = 2\pi b(\theta) |db(\theta)| \quad (1)$$

其物理意义是：单个靶粒子具有能使入射粒子散射到  $\theta$  方向的有效散射截面。

据此，我们定义微分散射截面：

$$\sigma_C(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \quad (2)$$

其物理意义是：单个靶粒子具有能使入射粒子散射到  $\theta$  方向单位立体角的有效散射截面。

### 定义 1.2 (从实验测量角度定义)

我们以  $\alpha$  粒子轰击金箔实验为例，假设靶面积为  $A$ ，靶厚度为  $t$ ，靶上原子数密度为  $n$ ，入射粒子总数为  $N$ ，则我们在经过靶散射后在  $\theta$  方向立体角  $d\Omega$  内探测到的粒子数为  $dN'$ ，我们定义出射粒子散射到  $\theta + d\theta$  范围的概率为：

$$dp(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{A} nAt \quad (3)$$

同时：

$$dp(\theta) = \frac{dN'}{N} \quad (4)$$

最终我们得到微分散射截面：

$$\sigma_C(\theta) = \frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{dN'}{Nntd\Omega} = \frac{dN'}{\frac{NnAtd\Omega}{A}} \quad (5)$$

其物理意义是：对于整块金箔中单位面积所含靶核数的散射，单位入射粒子、单位立体角内的散射粒子数。

### 定义 1.3 (从概率流角度定义)

在量子力学中，波函数是概率流的振幅，于是我们这样定义概率流密度：

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2i\mu}(\psi^*\nabla\psi - c.c.) \quad (6)$$

与电流密度类似，概率流密度具有  $[\rho\vec{v}]$  的量纲， $\rho$  是粒子束密度， $\vec{v}$  是速度，也就是说，概率流密度  $\vec{J}$  乘以面积量纲  $[\vec{x}^2]$  得到单位时间内通过这一面积的粒子数，在定态散射 (大量粒子源源不断射入，最终在空间中形成稳定稳定分布的状态) 中，这一物理量不依赖于时间，故我们有如下定义：

$$dn = \vec{J}_i \sigma_C(\theta) d\Omega \quad (7)$$

$$dn = \vec{J}_s r^2 d\Omega \quad (8)$$

其中， $\vec{J}_i$  是入射概率流， $\vec{J}_s$  是出射概率流， $\sigma_C(\theta)$  是微分散射截面。

### 定义 1.4 (从散射矩阵元角度定义)

在量子场论中，散射矩阵  $S$  描述系统从初态跃迁到末态的概率振幅，矩阵元  $S_{fi}$  定义为：

$$S_{fi} = \langle f|S|i\rangle \quad (9)$$

它是初态与末态之间的期待值，根据散射矩阵元我们可以定义初态到末态的跃迁概率，考虑单位时间的跃迁概率，也就是单位时间的散射次数。如前所述，散射截面表示发生散射的有效面积，从而建立其与散射次数的关系。最终我们给出一个 B 粒子打到一个 A 粒子上散射成  $n$  个粒子态情形的微分散射截面表达式：

$$d\sigma = \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \left( \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \quad (10)$$

其中  $\mathcal{M}$  是 Lorentz 不变的，称为不变矩阵元或不变散射振幅，这个物理量是我们之后求解的关键。

## 2 卢瑟福公式：经典力学

根据 Rutherford 原子模型，我们首先得到经典的 Coulomb 散射公式，为了实验测量方便，我们进而推导得 Rutherford 公式。

### 2.1 Coulomb 散射公式

我们简要给出 Coulomb 散射公式的证明：

库伦公式的推导:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{r^2} \vec{e}_r = m\dot{v} = m \frac{dv}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$mr^2 \ddot{\varphi} = \vec{L} = m\vec{v}b$$

$$d\vec{v} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 L} d\varphi \vec{e}_r$$

积分得: LHS =  $|\vec{v}_f - \vec{v}_i| = 2|\vec{v}| \sin \frac{\theta}{2}$

$$\text{RHS} = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 L} \int \vec{e}_r d\varphi = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{m|\vec{v}|b} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{mv^2 b}$$

$$\text{令 } a = \frac{z_1 z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E} \quad E = \frac{1}{2} mv^2$$

得:  $b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}$

## 2.2 Rutherford 公式

我们简要给出 Rutherford 公式的证明:

卢瑟福公式:

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}$$

$$d\sigma = 2\pi b |db| = \frac{2\pi a^2 \sin\theta d\theta}{16 \sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$$

$$d\sigma = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_2 e^2}{2E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

$$dP(\theta) = \frac{d\sigma}{A} n A t = \frac{a^2 d\Omega}{16 A \sin^4 \frac{\theta}{2}} n A t$$

$$dN' = N dP(\theta)$$

$$V_C = \frac{dN'(\theta)}{d\Omega} = \frac{dN'}{N n t d\Omega} = \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z_1 z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

## Part II

# 中篇：精确解

## 3 分波法：特殊函数

### 3.1 分波法评述

#### 模型设定

我们考虑两体问题，哈密顿量为：

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \quad (11)$$

薛定谔方程为：

$$H\psi = E\psi \quad (12)$$

#### 渐近解

我们考虑散射态  $E > 0$ ，且散射势能满足当  $\vec{r} \rightarrow \infty$  时， $V(\vec{r}) \rightarrow 0$  的情形<sup>1</sup>，我们引入：

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (13)$$

$$U(\vec{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2} V(\vec{r}) \quad (14)$$

薛定谔方程化为：

$$\nabla^2\psi + (k^2 - U(\vec{r}))\psi = 0 \quad (15)$$

我们考虑  $\vec{r} \rightarrow \infty$  的渐近解：

$$\psi \rightarrow e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty \quad (16)$$

#### 微分散射截面显示表达

根据上面的叠加解的形式代入概率流密度表达式 (6)，我们可以计算整个空间中的概率流分布，其中由于干涉项含有  $e^{-ikr\cos(\theta)}$ ，在  $\theta$  不为 0 的地方，震荡加速衰减，所以我们不考虑干涉项。计算如下：

<sup>1</sup>至于  $V(\vec{r}) \rightarrow 0$  的速度，这是一个值得探讨的问题，我们将在之后的章节详细讨论

渐近形式解:

入射平面波: 选沿  $z \rightarrow \infty$  方向入射

$$\psi_i(\vec{r}) = e^{ikz} \quad r \rightarrow \infty$$

出射球面波:

$$\psi_s(\vec{r}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad r \rightarrow \infty$$

代入薛定谔方程验证得:

$$\nabla^2 \psi_s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \psi_s}{\partial r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi_s) = -k^2 \psi_s$$

$$\nabla_{\theta}^2 \psi_s = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \psi_s}{\partial \theta}) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\nabla_{\phi}^2 \psi_s = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_s}{\partial \phi^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

即  $\psi_s$  又以  $\frac{1}{r}$  中趋于 0, 即可满足边界条件

叠加解:

$$\psi \rightarrow e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad r \rightarrow \infty$$

最终我们可以将微分散射面表达为:

$$\sigma_C = |f(\theta, \phi)|^2 \quad (17)$$

### 3.1.1 分波法的教科书表述

我们考虑相互作用形式为中心力场,  $U(\vec{r}) = U(r)$ , 相互作用只和  $|\vec{r}|$  有关, 记作  $r$ , 故薛定谔方程化为:

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - U(r))\psi = 0 \quad (18)$$

**分离变量** 我们考虑轴对称系统, 求解过程不依赖于  $\phi$ , 我们有以下试探解:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta) = R(r)H(\theta) \quad (19)$$

接下来将上述试探解代入薛定谔方程进行分离变量, 并对方程简要分析得到解的形式:

概率流求解：

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2i\mu} (\psi^* \nabla \psi - c.c.)$$

$$\vec{J}_i = \frac{\hbar}{2i\mu} (e^{-ikz} \nabla e^{ikz} - c.c.)$$

$$\vec{J}_i = J_{iz} = \frac{\hbar k}{\mu} e_i^z = v \vec{e}_z$$

$$\vec{J}_s = \frac{\hbar}{2i\mu} (f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \nabla f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} - c.c.)$$

$$\vec{J}_{sr} = \frac{\hbar}{2i\mu} [ |f|^2 \frac{1}{r^2} ik \cdot 2 ] = v \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{r^2}$$

注：和前面渐近形式解验证  $\nabla^2$  作用类似

$\vec{J}_{sr}$  和  $\vec{J}_{\phi\theta}$  是  $\frac{1}{r^2}$  量级，故省略

根据微分散射截面第3种定义：

$$dn = J_{sr} r^2 d\Omega = v |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega$$

$$dn = J_i \sigma(\theta, \phi) d\Omega = v \sigma(\theta, \phi) d\Omega$$

我们得到， $\theta$  方向的解：

$$H(\theta) = P_l(\cos(\theta)) \quad (20)$$

记  $r$  方向径向方程的解为  $R_l(r)$ ，我们得到解的一般形式：

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l R_l(r) P_l(\cos(\theta)) \quad (21)$$

其中， $C_l$  是组合系数。



分离变量过程:

$$\nabla^2 \psi + (k^2 - U)\psi = 0 \text{ 代入 } \psi(r, \theta) = R(r)H(\theta)$$

$$\text{分离变量得: } \frac{1}{k} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{H} \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dH}{d\theta} \right) + (k^2 - U) = 0$$

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 - U)r^2 \equiv \lambda \equiv -\frac{1}{H} \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dH}{d\theta} \right)$$

$$\Rightarrow \theta \text{ 方向: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dH}{d\theta} \right) + \lambda H = 0 \\ |H(0)| < \infty \quad |H(\pi)| < \infty \quad \text{自然边界条件} \end{array} \right.$$

$$\text{变量替换: } \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ p(x) = H(\theta) \end{array} \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dp}{dx} \right] + \lambda p = 0 \quad \text{勒让德方程} \\ |p(\pm 1)| < \infty \quad \text{内禀边界条件} \end{array} \right.$$

$$\text{解得: } \lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$p(x) = P_l(x) \Rightarrow H(\theta) = P_l(\cos\theta)$$

$\Rightarrow r$  方向: 将本征值  $\lambda$  代入得:

$$\frac{1}{k} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 - U)r^2 - l(l+1) = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 - U - \frac{l(l+1)}{r^2})R = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] R = 0 \\ R(0) = 0 \quad l = 1, 2, \dots \quad r=0 \text{ 时, } \theta \text{ 没有意义} \\ R(r) < \infty \quad l=0 \quad P_0 = 1 \text{ 不依赖于 } \theta \end{array} \right.$$

径向方程表达式 现在我们分析  $r$  方向的径向方程:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] R = 0 \quad (22)$$

球 Bessel 函数脉络 我们发现上述方程具有球 Bessel 方程的形式, 在具体求解之前, 我们先对于这些特殊化函数有一些基本的认识, 如下:

## 球 Bessel 函数脉落:

### ① Bessel 方程:

$$y'' + \frac{1}{x} y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2}) y = 0, \quad \nu \text{ 是本征值}$$

### ② 柱函数:

1) 柱函数一定是 Bessel 方程解, 反之不一定.

2)  $x \rightarrow \infty$  时的渐近形式:

$$Z_\nu(x) = \{ J_\nu, N_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)} \}$$

2.1): 它们之间关系类似于  $\{ \cos x, \sin x, e^{ix}, e^{-ix} \}$

2.2): 在正实轴上, 这四个函数大概按  $\frac{1}{x}$  衰减

### ③ 球 Bessel 函数:

1): 球 Bessel 方程:  $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + [1 - \frac{l(l+1)}{x^2}] y = 0$

2): 球 Bessel 方程的解:  $y(x) = \frac{Z_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}}$ , 其解相当于  $l+1/2$  阶柱函数

### ④ 一些直观的结论

1):  $j_l(x) = (-1)^l x^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad l \in \mathcal{N} \quad j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$

2): 有限形式:  $j_l(x) = \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{2^k k! (l-k)!} \frac{\cos[x - (l+k)\pi/2]}{x^{k+l}}$

3): 对 Bessel 方程线性独立解是  $y(x) = \{ J_\nu(x), N_\nu(x) \}$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_\nu(-x)}{\sin \nu\pi} = \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \ln \frac{x}{2} + \dots$$

可以看出  $N_\nu(x)$  在  $x=0$  处有奇性, 故若求解区域含  $x=0$ ,  $N_\nu(x)$  要舍弃

考虑自由粒子情况  $U(r) = 0$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (23)$$

自由粒子情况:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0$$

变量替换:  $\frac{x=kr}{R(r)=y(x)} \rightarrow$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left[ 1 - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] y = 0$$

这是标准球 Bessel 方程,

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} J_{l+1/2}(x)$$

求解区域含  $x=0$  舍弃  $n_l(x)$

得:  $R_l(r) = j_l(kr)$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

考虑相互作用情况  $U(r) \neq 0$  在  $r \rightarrow \infty$  的渐近解

如前所述, 当满足当  $r \rightarrow \infty$  时,  $U(r) \rightarrow 0$ , 且  $U(r) \rightarrow 0$  的速度比  $r \rightarrow \infty$  更快, 我们可以得到:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \quad (24)$$

相互作用  $r \rightarrow \infty$  的渐近解:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0 \quad r \rightarrow \infty$$

$$\text{恒等式: } \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} = \frac{d^2}{dr^2} (rR)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + k^2 R = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2} (rR) + k^2 (rR) = 0$$

$rR$  可以由  $\sin kr$ ,  $\cos kr$  组合得到

$$\text{令: } R_l(r) = \frac{A_l}{r} \sin(kr + \delta_l')$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l R_l(r) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{A_l}{r} \sin(kr + \delta_l') P_l(\cos \theta)$$

另一方面:

$$\psi(r, \theta) \rightarrow e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}$$

利用 Rayleigh 公式: 将平面波用球面波展开

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

$j_l(x)$  的一些渐近函数表达形式:

	$l=0$	$x \gg l$
$j_l(x)$	$\frac{\sin x}{x}$	$\frac{1}{x} \cdot \sin(x - \frac{1}{2}l\pi)$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos \theta) + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \dots (1)$$

其实, 关于将平面波用球面波展开的 Rayleigh 公式, 我们也可以从自由粒子情况中看出端倪: 对于自由粒子来说, 相当于没有受到散射, 故出射波应该也是平面波, 进而看到平面波用自由粒子出射解的表达形式, 就是 Rayleigh 公式。

故我们想办法将下式展开：

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \frac{A_l'}{r} \sin(kr + \delta_l') P_l(\cos\theta)$$

照着上面的(1)式，我们改写：

$$A_l' = \frac{A_l}{k} \quad C_l = i^l (2l+1) \quad \delta_l' = \delta_l - \frac{1}{2}l\pi$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) P_l(\cos\theta)$$

利用如下恒等式：

$$\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) = e^{-i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sin \delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} \left( e^{-i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sin \delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \right) P_l(\cos\theta)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} e^{-i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{A_l}{kr} \sin \delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} P_l(\cos\theta)$$

故我们取  $A_l = e^{i\delta_l}$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_l}}{kr} \sin \delta_l e^{i kr} P_l(\cos\theta)$$

对比上面的(1)式，解得：

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos\theta)$$

我们得到散射振幅表达形式：

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin(\delta_l) P_l(\cos(\theta)) \quad (25)$$

恒等式证明:

$$\begin{aligned}\sin(\theta + \delta) &= \sin\theta \cos\delta + \cos\theta \sin\delta \\ &= \sin\theta \cos\delta + (e^{i\theta} - i\sin\theta) \sin\delta \\ &= (\sin\theta \cos\delta - i\sin\theta \sin\delta) + e^{i\theta} \sin\delta \\ &= \sin\theta \cdot e^{i\delta} + e^{i\theta} \sin\delta\end{aligned}$$

得:

$$\sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) = e^{-i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sin\delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

## 一朵乌云

以上就是分波法教科书表述的内容, 然而我们发现对于 Rayleigh 公式将  $j_l(x)$  取为  $\frac{1}{x} \sin(x - \frac{l\pi}{2})$  会出现不收敛。

一朵乌云  $e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta)$  是收敛的

$$e^{ikr} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos\theta) \text{ 不收敛的}$$

举个例子:  $\theta=0$  或  $\pi$  时,  $P_l$  是 1 或  $\pm 1$

而  $j_l$  形式可以收敛是因为:

$$\begin{aligned}j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+l+\frac{1}{2})} (\frac{x}{2})^{2k+l+\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{2})^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+l+\frac{1}{2})} (\frac{x^2}{4})^k\end{aligned}$$

$$|sum| \leq 1 + 1 + \dots$$

$$\begin{aligned}|j_l(x)| &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{2})^l \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+l+\frac{1}{2})} (\frac{x^2}{4})^k \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{2})^l \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{x^2}{4})^k \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\frac{x}{2})^l \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} e^{\frac{x^2}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|e^{ikr}| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \left| i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos\theta) \right| \quad |P_l(\cos\theta)| \leq 1 \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |j_l(kr)| \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{kr}{2}\right)^l \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} e^{-\frac{kr}{2}} \\
\Gamma(l+\frac{3}{2}) &= \int_0^{\infty} x^{l+\frac{3}{2}} e^{-x} dx \quad \Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{0+1} e^{-x} dx = 1 \\
\Gamma(l+\frac{3}{2}) &= (l+\frac{1}{2}) \Gamma(l+\frac{1}{2}) \\
|e^{ikr}| &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{kr}{2}} \frac{1}{\Gamma(l+\frac{3}{2})} \left(\frac{kr}{2}\right)^l \rightarrow 0 \\
\text{该级数类似于 } \frac{a^l}{l!} &\text{ 求和收敛: } \frac{\frac{a^{l+1}}{(l+1)!}}{\frac{a^l}{l!}} = \frac{a}{l+1} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

我们发现  $j_l(x)$  解来自于  $\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}]R = 0$ , 而  $\frac{1}{x} \sin(x - \frac{l\pi}{2})$  解来自于  $\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$ , 出现上述问题是因为忽略了一些  $-\frac{l(l+1)R}{r^2}$  的项。

**评论** 对于分波法的教科书表述, 其中用  $\frac{1}{x} \sin(x - \frac{l\pi}{2})$  作为  $j_l(x)$  的渐近形式, 这样的近似仅仅对于一部分的分波成立, 需要满足的条件如下:

$$k^2 \gg \frac{l(l+1)R}{r^2} \tag{26}$$

$$kr \gg \sqrt{l(l+1)} \sim l \tag{27}$$

**注** 若是使用  $j_l(x)$  的有限形式<sup>2</sup>, 则条件更为苛刻:

$$kr \gg \sim l^2 \tag{28}$$

### 3.1.2 分波法的修正表述

根据上文讨论, 我们考虑相互作用情况  $U(r) \neq 0$  在  $r \rightarrow \infty$  的渐近形式为:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}]R = 0 \tag{29}$$

<sup>2</sup> $j_l(x)$  的有限形式参考前文径向方程表达式

相互作用  $r \rightarrow \infty$  的渐近解:

$$\frac{dR}{dr} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + [k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}]R = 0 \quad r \rightarrow \infty$$

变量替换:  $\frac{x=kr}{R(r)=y(x)} \rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + [1 - \frac{l(l+1)}{x^2}]y = 0$$

这是标准的球 Bessel 方程,

通解可以写成  $\{j_l, n_l, h_l^{(1)}, h_l^{(2)}\}$  中任意两个线性组合.

类似  $\{\cos x, \sin x, e^{ix}, e^{-ix}\}$

我们依然引入相移  $\delta_l$  作为组合系数

$$R_l(r) = A_l [\cos \delta_l j_l(kr) - \sin \delta_l n_l(kr)]$$

由于求解区域包含  $r=0$ ,  $n_l(kr)$  有奇性, 我们考虑用  $h_l^{(1)}$

类似  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i n_l(x)$$

$$R_l(r) = A_l [\cos \delta_l j_l(kr) - i \sin \delta_l j_l(kr) + i \sin \delta_l h_l^{(1)}(kr)]$$

$$= A_l [ \underbrace{e^{-i\delta_l} j_l(kr)}_{\text{平面波}} + \underbrace{i \sin \delta_l h_l^{(1)}(kr)}_{\text{向外散射的球面波}} ]$$

预期: 平面波      向外散射的球面波

取  $A_l = e^{i\delta_l}$   $R_l(r) = j_l(kr) + i e^{i\delta_l} \sin \delta_l h_l^{(1)}(kr) \quad r \rightarrow \infty$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) P_l(r)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) (j_l(kr) + i e^{i\delta_l} \sin \delta_l h_l^{(1)}(kr))$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) P_l(\cos \theta) j_l(kr) + \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) P_l(\cos \theta) e^{i\delta_l} \sin \delta_l h_l^{(1)}(kr)$$

从最后一条式子可以看出, 这时再与前文使用 Rayleigh 公式展开的平面波表达式进行比较, 则不需要使用  $j_l(x)$  的渐进形式, 从而避免前文所述的展开式的不收敛问题.

最后我们在做两点说明:

1. 上式中完美解决了平面波展开的收敛性问题, 细心的读者可能会怀疑第二项中出射球面波的收敛性, 在这里需要说明的是, 对于球 Bessel 函数, 其收敛性没有一



般性的证明，感兴趣的读者可以仿照第3.1.1中一朵乌云的方法证明，本文将不再赘述。

2. 同时，对于我们上面得到的修正形式，我们使用球 hankel 函数的渐进形式代替，散射振幅的形式将退回到方程25。

说明2:

$$h_l^{(1)}(x) = \text{渐近形式} \frac{(-i)^{l+1}}{x} e^{ix}$$

当  $e^{i\delta_l}$  随  $l$  增大趋于0较快，可以用渐近形式替代

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} i^{l+1} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \frac{(-i)^{l+1}}{kr} e^{ikr} \\ &= \frac{1}{r} e^{ikr} \left[ \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta) \right] \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta)$$

### 3.1.3 $R_l(r)$ 的渐近形式与分波法再考查

$R_l(r)$  的渐近形式与分波法再考查

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] R = 0$$

$$\begin{aligned} \text{渐近解: } & \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + k^2 (rR) = 0 \\ r \rightarrow \infty \end{array} \right. \\ & R_l(r) = \frac{A_l}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) \end{aligned}$$

我们引入离心势的概念  $W(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} + U(r)$

$$\text{令: } u_l(r) = rR_l(r) \rightarrow u''(r) + [k^2 - W(r)]u(r) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} W(r) = 0 & u(r) = e^{\pm ikr} \\ W(r) \neq 0 & u(r) = e^{\pm i[kr + F(r)]} \end{array} \right.$$

$$u'(r) = \pm i(k + F')u(r)$$

$$u''(r) = [\pm i F'' - (k + F')^2]u$$

$$= [\pm i F'' - F'^2 - 2kF' - k^2]u$$

“相图”

$$U(r) \sim \frac{1}{r^s} \quad s > 0, r \rightarrow \infty$$

$$1. s > 2 \quad W(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad F(r) \sim \frac{1}{r^2} \quad F(r) \sim \frac{1}{r} \rightarrow 0$$

$s > 2$  时, 可以使用分波法修正形式

注:  $s=2$  时, 分波法的表述有问题

$$2. 1 < s < 2 \quad W(r) \sim \frac{1}{r^s} \quad \text{如: } s = \frac{3}{2} \quad F(r) \sim \frac{1}{r^s} \quad F(r) \sim \frac{1}{r^{s-1}} \rightarrow 0$$

分波法的渐近形式还对, 但不知道怎么修正

$$3. s=1: W(r) = \frac{1}{r} \quad F(r) \sim \frac{1}{r} \quad F(r) = \ln(kr) \rightarrow \infty$$

就是 Coulomb 势

分波法的渐近形式失效了, 但是有修正形式

$$4. 0 < s < 1: W(r) \sim \frac{1}{r^s} \quad F(r) = \frac{1}{r^s}, \quad F(r) \sim r^{1-s} \rightarrow \infty$$

很发散, 是未知领域

### 3.1.4 关于相移的补充说明

分波法的关键就是计算相移, 对比自由粒子的表达式, 我们发现相移在可以解释为势场对于不同分波相位的改变。而自由粒子势场为 0, 故相移也为 0。

**评论** 我们给出以下结论: 1. 当势场是实数时, 相移是实数; 当势场变成复数时, 相移也是复数; 2. 只要  $R(0)$  是实数, 在之后的演化过程中就都是实数。

我们考虑径向方程在  $r \rightarrow 0$  时候的行为,  $U(r)$  无奇性或者说  $U(r) \sim \frac{1}{r^{2-\sigma}}, 0 < \sigma < 2$ :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} R = 0 \quad (30)$$

求解该方程得,  $R(r) \sim r^l, \frac{1}{r^{l+1}}, \frac{1}{r^{l+1}}$  在  $r \rightarrow 0$  不收敛, 故舍去。我们总可以通过变换  $R'(r) = e^{i\alpha} R(r)$  使得  $R'(r)$  变成实数。

### 3.1.5 需要计算的分波数

<sup>3</sup> 根据上面的讨论可以看出, 用分波法求散射截面的问题归结为计算相移  $\delta_l$ 。如果散射振幅中的级数收敛得很快, 我们只需计算前面几个分波的相移就可以得到足够准确的结果。反之, 如果这个级数收敛得很慢, 要得到较好的结果就需要算出许多个分波的相移, 而通常计算相移是相当复杂的, 因而在这种情况下分波法就变得很不方便。所以, 尽管从原则上说, 分波法是解散射问题的普遍方法, 但在实际上, 这个方法有一定的适用范围。下面我们对这个问题进行讨论。

设产生散射的势场  $V(r)$  的作用范围是以散射中心为球心、以力程  $a$  为半径的球内。当  $r > a$  时,  $V(r)$  的值可略去不计, 散射波仅在这范围内受到散射, 产生相移。散射波第  $l$  个分波的径向函数是  $j_l(kr)$ 。根据数学中对球面贝塞尔函数性质的分析,  $j_l(kr)$  的第一个极大值的位置在  $r = \frac{l}{k}$  附近, 而当  $r$  很小时,  $j_l(kr)$  随着  $kr$  很快地趋近于零,  $l$  愈大,  $j_l(kr)$  趋近于零也愈快。如果  $j_l(kr)$  的第一个极大值位于势场的作用范围以外, 即  $\frac{l}{k} > a$ , 则在势场作用范围 ( $r \leq a$ ) 内  $j_l(kr)$  的值很小, 即第  $l$  个分波受到势场的影响很小, 散射所产生的相移  $\delta_l$  可以略去不计。这样, 相移  $\delta_l$  只要从  $l = 0$  算到  $l \approx ka$  就够了。特别是当  $a$  小到使  $ka \ll 1$  时, 只需计算一个相移  $\delta$  就能很准确地得出散射截面。由此可见, 分波法在低能散射 (入射粒子能量  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  很小的情况下) 最为适用。

这个结论也可以从准经典的估计得出。当动量为  $\hbar k$  的入射粒子的角动量  $L = \mu v b$ ,  $b$  是经典的瞄准距离, 当  $L > \hbar k a$  时,  $b > a$ , 即粒子轨道在势场作用范围之外, 势场对粒子不产生散射。在初等量子力学中,  $L = l\hbar$ , 所以受势场散射的条件是  $l \leq \mu v a$ , 即:

$$l \leq ka \quad (31)$$

## 3.2 分波法求解 Coulomb 势散射

### 模型设定

库伦势记作  $V(r) = -\frac{K}{r}$ , 其中  $K > 0$  时, 是吸引相互作用, 例如原子核和电子  $K = Ze$ ,  $K < 0$  时, 是排斥相互作用, 哈密顿量为:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{r} \quad (32)$$

我们引入:

$$k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (33)$$

$$\beta = \frac{\mu K}{\hbar^2 k} = \frac{K}{\hbar v} \quad (34)$$

<sup>3</sup> 引用自《量子力学教程》周世勋

薛定谔方程化为：

$$\nabla^2 \psi + \left(k^2 + \frac{2\beta k}{r}\right) \psi = 0 \quad (35)$$

注 分离变量以及角向方程的求解与3.1.1中一致，我们直接写出径向方程以及解的一般形式：

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\beta k}{r}\right] R = 0 \quad (36)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) R_l(r) P_l(\cos(\theta)) \quad (37)$$

打点径向方程：

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\beta k}{r}\right] R = 0$$

$$\rho = kr \rightarrow \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2\beta}{\rho}\right] R = 0$$

考虑  $\rho \rightarrow 0$  的渐近解：

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} R = 0$$

欧拉方程，级数解为： $R(\rho) \sim \rho^k$

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - l(l+1)R = 0$$

$$k(k-1) + 2k - l(l+1) = 0 \quad \text{解得：} k = l \text{ 或 } -l-1 \text{ (舍)}$$

考虑  $\rho \rightarrow \infty$  的渐近解： $R(\rho) = \rho^l v(\rho)$

$$\frac{d^2 v}{d\rho^2} + \frac{2l+2}{\rho} \frac{dv}{d\rho} + \left(1 + \frac{2\beta}{\rho}\right) v = 0$$

$$v'' + v = 0$$

解得： $v \sim e^{\pm i\rho}$

打点径向方程发现最终变为合流超几何方程

进一步令:  $v(p) = e^{-ip} u(p)$ , 故  $R(p) = p^l e^{-ip} u(p)$

$$\text{得: } p \frac{d^2 u}{dp^2} + (2l+2-izp) \frac{du}{dp} + [2\beta - i(2l+2)] u = 0$$

$$t = izp \quad \frac{d}{dp} = zi \frac{d}{dt}$$

$$\text{得: } 2ip \frac{d^2 u}{dt^2} + (2l+2-t) \frac{du}{dt} + [-i\beta - (l+1)] u = 0$$

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + (2l+2-t) \frac{du}{dt} - (l+1+i\beta) u = 0$$

标准合流超几何方程:  $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$

$$\text{对比得: } a = l+1+i\beta \quad c = 2l+2$$

合流超几何方程脉络<sup>4</sup> 我们发现上述方程具有合流超几何方程的形式, 在具体求解之前, 我们先对于合流超几何方程有一些基本的认识, 如下:

合流超几何方程脉络:

标准合流超几何方程:  $xy'' + (c-x)y' - ay = 0$

① 在  $x=0$  领域, 有 2 个线性独立的试探解

$$\begin{cases} y_1(x) = \Phi(a, c, x) & \text{其中 } \Phi(a, c, x) = 1 + \frac{a}{1!c}x + \frac{a(a+1)}{2!c(c+1)}x^2 + \dots \\ y_2(x) = x^{1-c} \Phi(a-c+1, 2-c, x) & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n! (c)_n} x^n \end{cases}$$

$(c)_n = c(c+1)\dots(c+n-1)$   
 $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$

②  $\Phi(a, c, x)$  的直观感受

合流超几何方程在  $x \sim 0$  有级数解:

$$y = \sum_n C_n x^{n+s} \quad C_n = \frac{a+n-1}{n(n-1+c)} C_{n-1}$$

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \quad \Phi(a, c, x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e^x$$

③ 参数讨论:

1):  $c=0$  或负整数  $y_1$  不存在,  $y_2$  存在

2):  $c$  为大于 1 整数  $y_1$  存在,  $y_2$  不存在

3):  $c=1$  时  $y_1 = y_2 = \Phi(a, 1, x)$

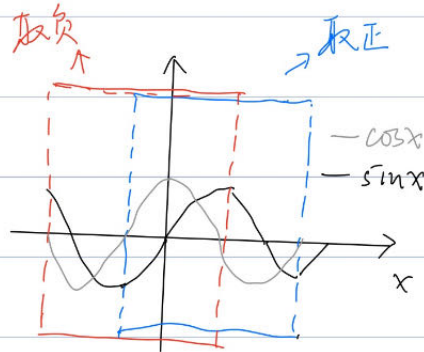
4):  $c$  不为整数  $y_1, y_2$  都存在且线性独立

<sup>4</sup>在撰写本文过程中, 笔者参考了曾谨言.《量子力学》发现了其中的一些错误, 望读者仔细甄别

④.  $\Psi(a, c, x)$  的渐近展开式

$$\Psi(a, c, x) \sim \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} e^{\pm a\pi i} x^{-a} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (1-c+a)_n}{n! x^n} \right\} \\ + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^x x^{a-c} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(c-a)_n (1-a)_n}{n! x^n} \right\}$$

注: " $e^{\pm a\pi i}$ " 在  $\arg x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  取正 在  $\arg x \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  取负



⑤.  $\Psi(a, c, z)$  的在  $z \rightarrow \infty$  渐近形式

$$\Psi(a, c, z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} z^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}$$

Coulomb 势散射径向方程求解 1

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + (2l+2-t) \frac{du}{dt} - (l+1+i\beta) u = 0$$

$$a = l+1+i\beta \quad c = 2l+2 \quad t = i2\rho$$

解得:  $u(\rho) = \Psi(l+1+i\beta, 2l+2, i2\rho)$

另一个解:  $\rho^{-l(1+i)}$  在  $\rho \rightarrow 0$  有奇性, 舍去

使用:  $\Psi(a, c, z) = e^{i\pi a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} z^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}$

第二项 =  $e^{i\pi(l+1+i\beta)} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-i\beta)} (2\rho e^{i\pi/2})^{-(l+1)-i\beta}$

$$\Gamma(z+1) = z!$$

Coulomb 势散射径向方程求解

$$= \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1-i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{-i\beta \ln 2\rho} e^{i\pi(l+1+i\beta)} e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1+i\beta)}$$

$$= \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1-i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{-i\beta \ln 2\rho} e^{-\frac{i\pi}{2}l} (i)^{l+1}$$

$$\text{第2项} = \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+i\beta)} e^{i2\rho} (2\rho e^{i\pi/2})^{-(l+1+i\beta)}$$

$$= \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1+i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{i\beta \ln 2\rho} e^{i2\rho} e^{-\frac{i\pi}{2}(l+1-i\beta)}$$

$$= \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1+i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{i(\beta \ln 2\rho)} e^{-\frac{i\pi}{2}l} (-i)^{l+1}$$

代入  $R_l(\rho) = \rho^l e^{-i\rho} u_l(\rho)$ , 引入系数  $B_l$ , 为方便凑成  $(2\rho)^l$

$$R_l(\rho) = B_l (2\rho)^l e^{-i\rho} \bar{u}_l(l+1+i\beta, 2l+1, i2\rho)$$

$$= B_l e^{-\beta\pi/2} \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1-i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{-i\rho - i\beta \ln 2\rho + i\frac{\pi}{2}l} \cdot i$$

$$+ B_l e^{-\beta\pi/2} \frac{(2l+1)!}{\Gamma(l+1+i\beta)} \frac{1}{(\rho p)^{2l+1}} e^{i\rho + i\beta \ln 2\rho - i\frac{\pi}{2}l} \cdot (-i)$$

### Coulomb 势散射径向方程求解2

$$\text{方便起见: 取 } B_l = e^{\frac{\beta\pi}{2}} \cdot \frac{1}{(2l+1)!} |\Gamma(l+1-i\beta)| A_l$$

定义相移  $\delta_l$ :

$$\Gamma(l+1-i\beta) = |\Gamma(l+1-i\beta)| e^{i\delta_l}$$

$$\text{故: } e^{i\delta_l} = \frac{\Gamma(l+1-i\beta)}{|\Gamma(l+1-i\beta)|} \quad e^{-i\delta_l} = \frac{\Gamma(l+1+i\beta)}{|\Gamma(l+1+i\beta)|} = \frac{\Gamma(l+1+i\beta)}{|\Gamma(l+1-i\beta)|}$$

$$\text{上式可化为: } R_l(\rho) = \frac{A_l}{2\rho} e^{-i\delta_l} e^{-i\rho - i\beta \ln 2\rho + i\frac{\pi}{2}l} \cdot i - \frac{A_l}{2\rho} e^{i\delta_l} e^{i\rho + i\beta \ln 2\rho - i\frac{\pi}{2}l} \cdot (-i)$$

$$2i \sin \delta_l = e^{i\delta_l} - e^{-i\delta_l}$$

$$= \frac{A_l}{\rho} \sin(\rho + \beta \ln 2\rho - \frac{\pi}{2}l + \delta_l)$$

$$\text{利用如下恒等式: } \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l) = e^{-i\delta_l} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) + \sin \delta_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}$$

$$\text{选取 } A_l = e^{i\delta_l}; R_l(r) = \frac{1}{kr} \sin(kr + \beta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2}) + \frac{(-i)^l}{kr} e^{i(kr + i\beta \ln 2kr)} \sin \delta_l e^{i\delta_l}$$

通过观察我们发现对于 Coulomb 势散, 径向方程的渐近形式添加了对数修正。

### Coulomb 势散射径向方程求解3

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^{l(2l+1)} P_l(\cos \theta) j_l(kr) + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \quad \dots (1)$$

老办法展开对比:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) R_l(r) P_l(\cos \theta)$$

瞄着上面的修正过的(1)式, 我们分成2项对比:

$$\textcircled{1} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr} \sin(kr + \beta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos \theta)$$

$$\approx \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) \frac{1}{kr + \beta \ln 2kr} \sin(kr + \beta \ln 2kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos \theta)$$

$$\approx \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr + \beta \ln 2kr) P_l(\cos \theta)$$

$$= \exp[i(kr + \beta \ln 2kr) \cos \theta]$$

$$= \exp[ikz + i\beta (\ln 2kr) \cos \theta]$$

$$\textcircled{2} = \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \delta_l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta)$$

$$\text{恒等式: } e^{ix} \sin x = \frac{1}{2i} (e^{i2x} - 1)$$

$$= \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{i2\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \frac{\Gamma(l+1-i\beta)}{\Gamma(l+1+i\beta)} - 1 \right] P_l(\cos \theta)$$

$$\equiv \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} f(\theta)$$

$$\text{故: } f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin \delta_l e^{i\delta_l} P_l(\cos \theta)$$

$$= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \frac{\Gamma(l+1-i\beta)}{\Gamma(l+1+i\beta)} - 1 \right] P_l(\cos \theta)$$

最终我们发现散射振幅与前文一致, 只不过, 对于入射波和出射波的都有一些扭曲, 来自于但对于径向方程渐近解的对数修正。



## 4 旋转抛物坐标法：对称性与守恒量

### 4.1 Binet 公式

在中心立场下，使用极坐标系，我们可以得到 Binet 公式，如下：

$$\vec{F} = -mh^2u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r \quad (38)$$

对于平方反比力，比耐方程就是一个非齐次项为常数的二阶常系数线性非齐次微分方程，容易计算。更一般的说，因为在 Coulomb 势的情况下，系统除了具有角动量守恒，能量守恒以外，还具有一个新的守恒量是：Laplace-Runge-Lenz 矢量：

$$\vec{M} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{\mu} - \kappa \frac{\vec{r}}{r} \quad (39)$$

我们以地球绕着太阳转为例，在这个系统中若 Laplace-Runge-Lenz 矢量为守恒量，则意味着近日点不作进动，同时我们根据理论力学的精神，每多一个守恒量，则该系统中会多一个运动积分，从而简化计算，林老师曾经在课堂上提到“当 Laplace-Runge-Lenz 矢量是守恒量的时候，薛定谔方程或者 Binet 方程，我们可以少计算一个。”

### 4.2 旋转抛物坐标求解

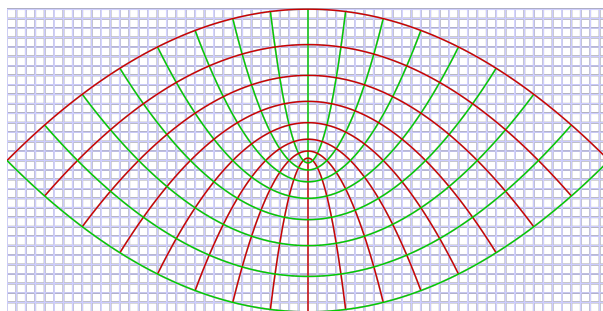


图 1: 抛物坐标系

如上图所示，抛物坐标系可以看作由两族开口相反的抛物线组构成，其交点位置即为坐标所在的空间位置。

## 旋转抛物坐标

抛物线极坐标方程

$$r = \frac{\xi}{1 - \cos\theta} \quad r = \frac{\eta}{1 + \cos\theta},$$

极  $\xi, \eta$  有焦距距的物理意义

$(\xi, \eta, \phi)$

$$\xi = r - \xi \quad \eta = r + \xi, \quad \theta = \phi \quad (\xi, \eta \geq 0)$$

转换到平面直角坐标系:

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\phi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin\phi, \quad z = \xi$$

对于任意正交曲线系 (类似于雅各比矩阵)

$$D^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} (\cos\phi \vec{i} + \sin\phi \vec{j}) - \frac{1}{2} \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} (\cos\phi \vec{i} + \sin\phi \vec{j}) + \frac{1}{2} \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \sqrt{\xi\eta} (-\sin\phi \vec{i} + \cos\phi \vec{j})$$

$$h_1 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} \right| = \sqrt{\frac{\eta}{4\xi} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\xi+\eta}{4\xi}}$$

$$h_2 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} \right| = \sqrt{\frac{\xi+\eta}{4\eta}}$$

$$h_3 = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right| = \sqrt{\xi\eta}$$

$$h_1 h_2 h_3 = \frac{1}{4} (\xi + \eta)$$

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} = h_3 \sqrt{\frac{\xi}{\eta}} = \xi$$

$$\frac{h_3 h_1}{h_2} = h_3 \sqrt{\frac{\eta}{\xi}} = \eta$$

$$\frac{h_1 h_2}{h_3} = \frac{\xi + \eta}{4\xi\eta}$$

故:

$$\begin{aligned} D^2 &= \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\xi + \eta}{4\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \\ &= \frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right) \right] + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

抛物坐标系下分离变量:

$$\nabla^2 \psi + (k^2 + \frac{2\beta k}{r}) \psi = 0 \quad \psi = \psi(\xi, \eta) \text{ 与 } \rho \text{ 无关}$$

$$\frac{4}{\xi + \eta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] + (k^2 + \frac{4\beta k}{\xi + \eta}) \psi = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + [\beta k + \frac{1}{4} k^2 (\xi + \eta)] \psi = 0$$

考虑  $\xi \rightarrow -\infty$  渐近解:

$$\psi \rightarrow e^{ik\xi} \quad \xi \rightarrow -\infty$$

$$\psi \rightarrow e^{ik(\eta - \xi)/2} \quad \xi \rightarrow \infty \quad \forall \eta$$

$$\text{令 } \psi(\xi, \eta) = e^{ik\eta/2} \varphi(\xi)$$

$$\xi \varphi'' + \varphi' + \left[ (\beta + \frac{i}{2}) k + \frac{k^2}{4} \xi \right] \varphi = 0$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad \xi \varphi'' + \frac{k^2}{4} \xi \varphi = 0 \quad \varphi'' + \frac{k^2}{4} \varphi = 0$$

$$\text{解得: } \varphi = e^{-ik\xi/2}$$

$$\text{令 } \varphi(\xi) = e^{-ik\xi/2} u(\xi)$$

$$\xi u''(\xi) + (1 - ik\xi) u'(\xi) + \beta k u(\xi) = 0$$

$$\text{变量替换 } t = ik\xi \quad \frac{du}{d\xi} = ik \frac{du}{dt}$$

$$\xi (ik)^2 \frac{du^2}{dt^2} + (1-t) ik \frac{du}{dt} + \beta k u = 0$$

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + (1-t) \frac{du}{dt} - i\beta u = 0$$

含流超几何方程:

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + (1-t) \frac{du}{dt} - i\beta u = 0$$

$$u(t) = A \bar{\chi}(i\beta, 1, t)$$

$$u(z) = A \bar{\chi}(i\beta, 1, ikz)$$

$$\psi(z, \eta) = A e^{ikz} \bar{\chi}(i\beta, 1, ikz)$$

$$\text{使用: } \bar{\chi}(a, c, z) = e^{iaz} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} z^{-a} + \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-c}$$

$\theta \neq 0, r \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty$  解的渐近形式

$$\begin{aligned} \psi(z, \eta) &= A e^{ikz} \frac{e^{i\pi(i\beta)}}{\Gamma(1-i\beta)} (ikz)^{-i\beta} + A e^{ikz} \frac{1}{\Gamma(1-i\beta)} e^{ikz} (ikz)^{i\beta-1} \\ &= \frac{A e^{-\beta\pi/2}}{\Gamma(1-i\beta)} e^{ikz - i\beta \ln kz} + \frac{A e^{-\beta\pi/2}}{i\Gamma(i\beta)} \frac{1}{kz} e^{ikr + i\beta \ln kz} \end{aligned}$$

$$\text{取 } A = e^{\beta\pi/2} \Gamma(1-i\beta), \quad \underline{z} = r - z = r(1 - \cos\theta) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \psi(z, \eta) &= e^{ikz - i\beta \ln kz} + \frac{\Gamma(1-i\beta)}{i\Gamma(i\beta)} \frac{1}{k} \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)} \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \exp(i\beta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ &= e^{ikz - i\beta \ln kz} + f(\theta) \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \end{aligned}$$

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(1-i\beta)}{i\Gamma(i\beta)} \frac{1}{k} \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)} \exp(i\beta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z) \rightarrow \Gamma(1+i\beta) = i\beta\Gamma(i\beta) \quad v = \frac{\hbar k}{\mu} \quad \beta = \frac{k}{\hbar v}$$

$$= \frac{k}{2\mu v^2} \frac{\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(1+i\beta)} \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \exp(i\beta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

比较不同坐标系下结果:

球坐标系下:

$$\psi(r, \theta) = e^{ikz + i\beta(\ln kr)\cos\theta} + \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left[ \frac{\Gamma(l+1-i\beta)}{\Gamma(l+1+i\beta)} - 1 \right] P_l(\cos\theta)$$

抛物坐标系下

$$\psi(\xi, \eta) = e^{ik\xi - i\beta \ln k\xi^2} + \frac{1}{r} e^{ikr + i\beta \ln 2kr} \frac{1}{2ik} \frac{\Gamma(1-i\beta)}{\Gamma(i\beta)} \frac{1}{2\sin^2(\theta/2)} \exp(i\beta \ln \sin^2 \frac{\theta}{2})$$

Rutherford 公式:

$$\sigma_C(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{k^2}{4u^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

## Part III

# 下篇：近似解

## 5 玻恩近似法：一阶微扰

受限于笔者对于 Born 近似的粗浅理解，本章意在过渡，没有较为精确的数学推理和深刻的物理见解，例如本文无法回应林老师课堂上所说“Born 近似可以得到正确的散射截面，但是相位不匹配”……还望读者见谅。本章主要解决两个问题：1. 考虑屏蔽库伦势，在定态散射条件下，对哈密顿量作一阶玻恩近似，最终推出经典情况下的 Rutherford 公式。2. 通过摆出一些  $T$  算符和  $S$  算符的结论，证明非相对论性量子力学的 Born 近似给出散射矩阵元表达式，以为后文费曼图法部分埋下伏笔。

### 5.1 屏蔽库伦势的定态散射

我们发现分波法在入射粒子的动能较大时，应用起来很不方便，如果入射粒子的动能比粒子与散射中心相互作用的势能大得多，以致势能  $U(r)$  可以看做是微扰时而且是定态微扰，可用本节介绍的玻恩近似法来计算散射截面。

首先要说明的是，为什么我们要使用屏蔽库伦势呢？应为对于平方反比的库伦力来说，是一个长程力，他认为整个宇宙的带电粒子都会收到来自某个角落的带电粒子的库伦相互作用力，这显然是不物理的，我们可以从 Rutherford 公式看出在  $\theta = 0$  有奇性，所以，在上面分波法的推导过程中，我们希望  $U(r)$  随着  $r$  增大迅速变为 0，而对于后续的 Coulomb 势求解，我们也忽略散射角  $\theta = 0$  位置的求解。

玻恩近似入门：

$$H = H_0 + U(r)$$

$$dn = \frac{V}{L^3} \sigma_c(\theta) d\Omega$$

→ 入射流密度

← 单位时间散射的粒子数

使用箱归一化，

$$\text{基态波函数为: } \varphi(r) = L^{-\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r}}$$

$$\text{态密度为: } \rho(m) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m p d\Omega$$

$$\text{跃迁概率为: } w = \frac{W}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |U(r)|^2 \rho(m)$$

$$dn = w \cdot \rho(m)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |U(r)|^2 \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 m p d\Omega$$

$$\text{微分散射截面: } \sigma_c(\theta) = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4} \left| \int U(r) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} dr \right|^2$$

$$\text{令 } \vec{K} = \vec{k} - \vec{k}' = 2|k| \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\int U(r) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} dr = \frac{4\pi}{K} \int_0^\infty r U(r) \sin(\vec{K} \cdot \vec{r}) dr$$

$$\sigma_c(\theta) = \frac{4m^2}{K^2 \hbar^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin(\vec{K} \cdot \vec{r}) dr \right|^2$$

我们根据屏蔽库伦势的玻恩近似推导得到了 Rutherford 散射公式，它首先由卢瑟福用经典力学方法计算库仑散射（不考虑屏蔽作用）得出，这说明是经典力学方法可以适用的条件是要求散射角  $\theta$  比较大，能量比较大，这时散射在原子核附近发生，即入射粒子深入到原子内部因而核外电子不起屏蔽作用当  $\theta$  角很小时，条件式不被满足卢瑟福公式。

## 5.2 $T$ 算符和 $S$ 算符

$$\text{证明 } \langle \mathbf{p}_1^+, \sigma_1 | iT | \mathbf{k}_1^+, \sigma_1 \rangle = -i\tilde{V}(\mathbf{q}) \cdot 2\pi\delta(E_{p_1} - E_{k_1})$$

接下来，我们使用 Born 近似的方法来得到散射矩阵元和散射势能的期望值之间的关系，这里似乎有些突兀，是为了于后面量子场论的结论做对比。

## 屏蔽库仑 Coulomb 势

$$U(r) = -\frac{z_1 z_2 e^2}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$V_C(0) = \frac{4m^2}{k^2 k^4} \left| \int_0^\infty r U(r) \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) dr \right|^2$$

$$= \frac{4m^2 z_1^2 z_2^2 e^4}{k^4} \frac{1}{(k^2 + \frac{1}{a^2})^2}$$

若  $\vec{k} a = 2ka \sin \frac{\theta}{2} \gg 1$

$$V_C(0) = \frac{z_1^2 z_2^2 e^4}{4m^2 v^4} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad \text{是卢瑟福公式!!!}$$

证明:  $\langle f | i \hat{T} | i \rangle = -i \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_f - E_i)$

$|k\rangle$  表示平面波态  $|\psi_p\rangle$  表示散射态的叠加态

$$(E - H_0) |\psi_p\rangle = V |\psi_p\rangle \Rightarrow H |\psi_p\rangle = E |\psi_p\rangle$$

$$(E - H_0) |k\rangle = 0 \quad H_0 |k\rangle = E |k\rangle$$

李普曼-史温格方程:

$$|\psi_p^\pm\rangle = |k\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} V |\psi_p^\pm\rangle \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\psi_{p_1}^\pm\rangle = |k\rangle + \frac{1}{E_i - H \pm i\epsilon} V |k\rangle \quad \dots \textcircled{2}$$

定义: 跃迁算符  $\hat{T}$   $\hat{T}^\pm |k\rangle = V |\psi_p^\pm\rangle$

库勒算符  $\hat{\Omega}^\pm$   $\hat{\Omega}^\pm |k\rangle = |\psi_p^\pm\rangle$

散射算符  $\hat{S}$   $\hat{S} = (\hat{\Omega}^-)^\dagger \hat{\Omega}^+$

## 6 费曼图法: 量子场论

### 6.1 QED 理论

在这一节中, 由规范对称性的启发, 我们写出 QED 的拉氏量, 之后通过欧拉拉格朗日方程, 计算运动方程, 其中, 关于无质量矢量场的运动方程与 Maxwell 方程具有等价性; 关于旋量场的运动方程与 Dirac 方程有微妙关系——仅仅将其普通导数换成了协变导数。其相关数学表述如下:



开始推导:

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_{fi} &= \langle k_f | S | k_i \rangle = \langle \psi_{p_f}^- | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 &= \left[ \langle k_f | + \langle k_f | V \frac{1}{E_f - \hat{H} + i\epsilon} \right] | \psi_{p_i}^+ \rangle \quad \downarrow \text{①展开} \\
 &= \langle k_f | \psi_{p_i}^+ \rangle + \frac{1}{E_f - E_i + i\epsilon} \langle k_f | V | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 \text{①展开} \quad \downarrow & \\
 &= \langle k_f | [ | k_i \rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \psi_{p_i}^+ \rangle ] + \frac{1}{E_f - E_i + i\epsilon} \langle k_f | V | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 &= \langle k_f | k_i \rangle + \left( \frac{1}{E_i - E_f + i\epsilon} + \frac{1}{E_f - E_i + i\epsilon} \right) \langle k_f | V | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 &= \langle k_f | k_i \rangle - \frac{2i\epsilon}{(E_f - E_i)^2 + \epsilon^2} \langle k_f | V | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 &= \langle k_f | k_i \rangle - \frac{2i\epsilon}{(E_f - E_i)^2 + \epsilon^2} \langle k_f | V | \psi_{p_i}^+ \rangle \\
 &= \langle k_f | k_i \rangle - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \tilde{V}(p)
 \end{aligned}$$

换成物论语言:  $\hat{S} \approx 1 + i\hat{T}$

$$S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | i \hat{T} | i \rangle$$

$\downarrow$  自由部分       $\downarrow$  散射部分

得证:  $\langle f | i \hat{T} | i \rangle = -i \tilde{V}(q) 2\pi \delta(E_f - E_i)$

QED理论:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{QED} &= \sum_f (i \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_f(x) - m_f \bar{\psi}_f(x) \psi_f(x)) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
 &= \sum_f (i \bar{\psi}_f \gamma^\mu \partial_\mu \psi_f - m_f \bar{\psi}_f \psi_f) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + ie \sum_f A_\mu \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f
 \end{aligned}$$

EL:  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi(x)} = 0$

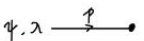
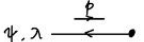

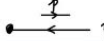
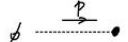
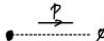
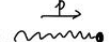

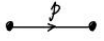
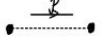
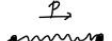
EOM:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = J_{EM}^\nu = \sum_f q_f e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$

$(i \gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f = 0$

## 6.2 费曼图法

在这一节, 我们不加证明的给出 QED 理论中的动量空间费曼规则, 并以  $e^- p \rightarrow e^- p$  散射为例, 写出费曼图的领头阶计算不变振幅  $i\mathcal{M}$ , 最终得到微分散射截面。除了上述内外线规则外, 对于不同的相互作用拉氏量, 具有不同的顶点规则, 但顶点的费曼规则

### 动量空间费曼规则 (QED)

1. Dirac 正费米子入射外线:		$= u(\vec{p}, \lambda)$
2. Dirac 反费米子入射外线:		$= \bar{v}(\vec{p}, \lambda)$
3. Dirac 正费米子出射外线:		$= \bar{u}(\vec{p}, \lambda)$
4. Dirac 反费米子出射外线:		$= v(\vec{p}, \lambda)$
5. 实标量场玻色子入射外线:		$= 1$
6. 实标量场玻色子出射外线:		$= 1$
7. 有质量实矢量玻色子入射外线		$A, \lambda; \mu = \epsilon^\mu(p, \lambda)$
8. 有质量实矢量玻色子出射外线		$A, \lambda; \mu = \epsilon^{\mu\nu}(p, \lambda)$
9. Dirac 费米子传播子		$= \frac{i(\not{p} + m_f)}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon} = \frac{i}{p^2 - m_f^2 + i\epsilon}$
10. 实标量场玻色子传播子		$= \frac{i}{p^2 - m_b^2 + i\epsilon}$
11. 有质量实矢量玻色子传播子		$= \frac{-i(g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / M^2)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$

一般的规律是将相互作用拉氏量中剥离场算符得到。

## 6.2.1 微分散射截面

在量子场论框架下，计算微分散射截面的脉络是从**散射矩阵**到**跃迁概率**再到**散射截面**，本节我们给出散射截面的一般表达式，我们将以 2 到 2 散射为例，求出其中的运动学部分，最后我们便将目光集中于了动力学部分：不变振幅模方  $|\mathcal{M}|^2$ 。

## 6.3 返璞归真：重现 Coulomb 势，Rutherford 公式

在这一节，1. 我们通过上面计算得到的微分散射截面，考虑在非相对论极限下退化 Rutherford 公式。2. 我们通过比较费曼图和 born 近似得到的散射矩阵元，得到 Coulomb 势。

关于散射的一些概念:

散射矩阵  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n T[H_I(x_1) \dots H_I(x_n)]$

$S_{fi} = \langle f | i \rangle + \langle f | T | i \rangle$

散射矩阵元  $\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) i M$

$M$  是不变散射振幅 和初末态动量有关, 是动力学的

跃迁概率  $P_{fi} = \frac{|\langle f | T | i \rangle|^2}{\langle i | i \rangle \langle f | f \rangle}$

单位时间跃迁概率  $R_{fi} = \frac{P_{fi}}{T}$

$R = \left( \prod_{j=1}^n \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p_j \right) R_{fi}$

$R = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B V} \left( \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |M|^2$

散射截面定义式:

$$N = N_A j_b v t$$

↑ 粒子数      → 流密度  $\frac{N_b}{At}$   
 ↓  
 t 时间发生散射的次数      面积

散射截面表达式:

$\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \left[ \prod_{j=1}^n \int \frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2E_j} \right] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - \sum_{j=1}^n p_j) |M|^2$

↓ A 静止  $|v_A|$        $\int d\Omega_n$

末态对称因子  $S = \prod_k n_k!$

2 体散射  $\sigma = \frac{1}{S} \frac{1}{4E_A E_B |v_A - v_B|} \int d\Omega_2 |M|^2$        $\int d\Omega_2 = \int d\Omega \frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{cm}}$

运动学部分      动力学部分

微分散射截面:  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{1}{64\pi^2 E_A E_B |v_A - v_B|} \frac{|\vec{p}_1|}{E_{cm}} |M|^2$

$e^-p \rightarrow e^-p$  领头阶不变振幅:

QED 相互作用顶点规则:

$$= -iQ_f e \gamma^\mu$$

不变振幅:

$$i\mathcal{M} = \bar{u}(p_2) (ie\gamma^\mu) u(k_1) \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}(p_1) (-ie\gamma^\nu) u(k_2)$$

$$= -\frac{ie^2}{q^2} \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(k_1) \bar{u}(p_1) \gamma_\mu u(k_2)$$

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8e^4}{(q^2)^2} [(k_1 \cdot p_2)(p_1 \cdot k_2) + (k_1 k_2)(p_1 p_2) - m_e^2 (p_1 k_2) - m_p^2 (k_1 \cdot p_1) + 2m_e^2 m_p^2]$$

考虑入射动量远小于  $m_p$  极限, 计算内积, 最终得到:

动力学:  $|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{16\pi^2 \alpha^2 m_p^2}{v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} (1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$

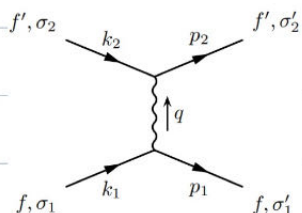
运动学:  $\int d\Omega = \int d\Omega \frac{Q}{16\pi^2 m_p}$

Mott公式  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 Q^2 \sin^4(\theta/2)} (1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})$

$v \ll 1, Q \simeq m_e v$

Rutherford公式:  $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4v^2 m_e^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}$  (自然单位制)

$ff' \rightarrow ff'$  . Coulomb 散射:



非相对极限条件下  $|k_i|, |p_i| \ll m_f, m_{f'}$

$$k_i^\mu \simeq (m_f, \vec{k}_i) \quad k_2^\mu \simeq (m_{f'}, \vec{k}_2)$$

$$p_i^\mu \simeq (m_f, \vec{p}_i) \quad p_2^\mu \simeq (m_{f'}, \vec{p}_2)$$

$$\begin{aligned} iM &= -\frac{i\partial_f \partial_{f'} e^2}{q^2} \bar{u}(\vec{p}_1, \sigma_1') \gamma^\mu u(\vec{k}_1, \sigma_1) \bar{u}(\vec{p}_2, \sigma_2') \gamma_\mu u(\vec{k}_2, \sigma_2) \\ &= -\frac{i\partial_f \partial_{f'} e^2}{q^2} \delta\sigma_1' \sigma_1 \delta\sigma_2' \sigma_2, \quad q = k_1 - p_1 \end{aligned}$$

散射矩阵元:  $\langle p_2^+, \sigma_2'; p_1^+, \sigma_1' | i T | k_1^+, \sigma_1; k_2^+, \sigma_2 \rangle = iM (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_1 - p_2)$

Born 近似得到的矩阵元:

$$\langle f | i T | i \rangle = -i \tilde{V}(q) \cdot 2\pi \delta(E_f - E_i)$$

$$\tilde{V}(q) = \int d^3x V(x) e^{-iqx}$$

对比得:  $V(r) = \frac{\partial_f \partial_{f'} e^2}{4\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_0 \frac{e^{i|q|r}}{|q|}$

使用留数处理:

Coulomb 势:  $V(r) = \frac{\partial_f \partial_{f'} e^2}{4\pi r}$  (自然单位制)

## 参考文献

- [1] 杨福家. 原子物理学[M]. 高等教育出版社, 2008.
- [2] 周世勋, 陈灏. 量子力学教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [3] 喀兴林. 高等量子力学[M]. 高等教育出版社, 2001.
- [4] 曾谨言. 量子力学教程[M]. 科学出版社, 2003.
- [5] SCHIFF L I. Quantum Mechanics. Third Edition[M]. McGRAW-HILL BOOK COMPANY, 1955.
- [6] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 特殊函数概论, 1965.
- [7] 曾谨言. 量子力学, 卷一[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [8] GRIFFITHS D J, SCHROETER D F. Introduction to quantum mechanics[M]. Cambridge university press, 2018.
- [9] 余钊焕. 量子场论讲义[Z/OL]. 中山大学物理学院. 2023. <https://zhxxzxy.github.io/cn/teaching.html>.